<자연계열-오전>

2020학년도 수시모집
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

고등학교 과정 수학에서 다루는 기본적인 내용에 대한 이해도를 전반적으로 평가하고자 하였다. 이를 위해서 고등학교 수학에서 배우는 로그의 뜻과 성질, 수열의 합, 조건부확률, 포물선의 성질, 음함수 미분법, 점과 직선 사이의 거리 등 다양한 개념을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 상용로그의 성질과 삼각함수의 특성을 통해 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 확률을 이용하여 주어진 상황을 수학적으로 이해하고 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다. 확률밀도함수의 성질을 파악하고 주어진 상황을 수학적으로 이해하여, 요구하는 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 포물선의 성질을 파악하고 음함수 미분법을 활용하여 접선을 구할 수 있는지 평가한다. 이와 함께 직선과 원의 관계를 파악할 수 있는지와 점과 직선사이의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] $\sin\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=(-1)^{n+1}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\log a_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\log(k+3)(k+4)=\log 4+(-1)^{n+1}\log(n+4)$$

이다. 주어진 합이 음수인 경우는 n이 짝수일 때이다. 짝수 n에 대하여

$$\log\frac{4}{n+4}=-2$$

이므로 $n=396$이다.

[1.2] 확률밀도함수의 성질에 의해 $\int_0^{10}at^2\,dt=1$이므로 $a=\dfrac{3}{1000}$이다. 8시 3분에 투어버스가 출발하지 않았을 확률은 $\int_3^{10}\dfrac{3}{1000}t^2\,dt=\dfrac{973}{1000}$이고, 8시 8분에 투어버스가 기다리고 있을 확률은 $\int_8^{10}\dfrac{3}{1000}t^2\,dt=\dfrac{488}{1000}$이다. 따라서 8시 3분에 투어버스가 출발하지 않았을 때, 8시 8분까지 기다리고 있을 확률은 $\dfrac{488}{973}$이다.

[1.3] 점 P가 점 A에서 포물선 $y^2=2x+1$의 준선 $x=-1$에 내린 수선과 포물선의 교점일 때, 삼각형 OAP 둘레의 길이는 최소가 된다. 이때 점 P는 $(1,\sqrt{3})$이다. 주어진 포물선에서 $2y\dfrac{dy}{dx}=2$이므로 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$$x-\sqrt{3}y+2=0$$

이다. 원 C의 중심과 접선 l 사이의 거리는 $\dfrac{t+2}{2}$이고, 원 C와 접선 l 사이의 거리의 최솟값이 1이

므로 $\dfrac{t+2}{2}=r+1$이다. 또한 원 C는 주어진 포물선에 접하므로 $(x-t)^2+(2x+1)=r^2$에서 판별식에 의해 $r^2=2t$이다. 따라서 $t=8$이다.

3. 출제근거

「판별식」, 『고등학교 수학 I』, 지학사, 2016, 72-74쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2016, 51-56쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학 II』, 지학사, 동아출판, 2016, 162-166쪽.
「로그의 뜻과 성질」, 『고등학교 수학 II』, 동아출판, 2016, 218-223쪽.
「상용로그」, 『고등학교 수학 II』, 동아출판 2016, 225-228쪽.
「도함수」, 『고등학교 미적분 I』, 지학사, 2018, 97-102쪽.
「포물선」, 『고등학교 기하와 벡터』, 좋은책 신사고, 2017, 12-15쪽.
「음함수와 접선의 방정식」, 『고등학교 기하와 벡터』, 좋은책 신사고, 2017, 32-36쪽.
「연속확률변수의 확률분포」, 『고등학교 확률과 통계』, 비상교육, 2019, 104-108쪽.
「확률변수와 확률분포」, 『고등학교 확률과 통계』, 미래엔, 2019, 93-98쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

현대 사회에서 데이터를 분석하는 능력은 갈수록 중요해지고 있다. 이 문제에서는 고등학교 과정 수학을 이용하여 주어진 데이터에 가까운 직선을 찾는 방법을 제시하고 있다. 최근 각광받는 인공신경망 학습 역시 오차함수를 최소화하는 값을 찾는 방법으로 생각할 수 있다. 고등학교 과정에서 배우는 미분법과 벡터는 수학적 데이터 분석을 위한 기본일 뿐만 아니라 대학과정 수학 및 전공 수업 이해를 위해서도 필수적이다. 본 문항에서는 평면 벡터의 내적과 함수의 미분법 및 활용에 대한 기본적인 개념을 알고 있는지 확인하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 평면벡터의 내적을 활용하여 거리를 표현할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 도함수를 이용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 미분법을 활용하여 다항함수와 유리함수가 언제 최소가 되는지 주어진 데이터로부터 알 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 점 (x_i, y_i)를 A_i라 하고, 점 A_i로부터 직선 $y=tx$에 내린 수선의 발을 B_i라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OB}_i}$는 $\vec{u}$와 평행하므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_\mathrm{i}}$와 $\vec{u}$가 이루는 각을 θ라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_i}$의 크기는

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}_i}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right|\left|\vec{u}\right|\cos\theta=\vec{v_i}\cdot\vec{u}$$

이다(참고로 $t>0$이고, 점 A_i는 제1사분면에 있기 때문에 $\theta<\frac{\pi}{2}$이다). 피타고라스의 정리에 의해

$$d_i^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}_i}\right|^2=\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_i}-(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{u})^2$$

이므로

$$E(t)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{v_i}-(\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{u})^2\right\}$$

이다.

[2.2] 주어진 세 점에 대하여 제곱오차는

$$L(t)=(1-t)^2+(3-2t)^2+(2-3t)^2=14-26t+14t^2$$

이므로

$$\frac{dL}{dt}=-26+28t$$

이다. 따라서 $t=\frac{13}{14}$에서 $L(t)$는 최소이고, 최소제곱오차직선은

$$y=\frac{13}{14}x$$

이다. 주어진 세 점에 대하여 거리제곱오차는

$$E(t)=28-\frac{1}{1+t^2}\left\{(1+t)^2+(2+3t)^2+(3+2t)^2\right\}=28-\frac{14+26t+14t^2}{1+t^2}$$

이므로

$$\frac{dE}{dt}=\frac{26(t^2-1)}{(1+t^2)^2}$$

이다. 따라서 $t=1$에서 $E(t)$는 최소이고, 최소거리제곱오차직선은

$$y=x$$

이다.

[2.3] 주어진 n개의 점에 대하여 제곱오차는

$$L(t)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-tx_i)^2$$

이므로

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(y_i-tx_i)^2=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-tx_i)x_i=-2n\left\{m_{XY}-(\sigma_X^2+m_X^2)t\right\}=-2n\left(\frac{39}{4}-\frac{15}{2}t\right)$$

이다. 그러므로 $t=\frac{13}{10}$에서 $L(t)$는 최소이고, 최소제곱오차직선은

$$y=\frac{13}{10}x$$

이다. 한편 주어진 n개의 점에 대하여 거리제곱오차는

$$E(t)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)-\frac{1}{1+t^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{2n}{(1+t^2)^2}\left\{\frac{t^2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-y_i^2) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right\} \\ &= \frac{2n}{(1+t^2)^2}\left[m_{XY}t^2 + \left\{(\sigma_X^2+m_X^2)-(\sigma_Y^2+m_Y^2)\right\}t - m_{XY}\right] \\ &= \frac{n}{(1+t^2)^2}\left(\frac{39}{2}t^2 - 12t - \frac{39}{2}\right)\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\frac{n}{(1+t^2)^2} > 0$이므로 $E(t)$는

$$t = \frac{4+\sqrt{185}}{13}$$

에서 최솟값을 가진다. 따라서 최소거리제곱오차직선은

$$y = \frac{4+\sqrt{185}}{13}x$$

이다.

3. 출제근거

「도함수」, 『고등학교 미적분 I』, 지학사, 2018, 97-102쪽.
「함수의 극대와 극소」, 『고등학교 미적분 I』, 지학사, 2018, 118-121쪽.
「함수의 몫의 미분법」, 『고등학교 미적분 II』, 미래엔, 2016, 103-106쪽.
「합성함수의 미분법」, 『고등학교 미적분 II』, 미래엔, 2016, 107-114쪽.
「평면벡터의 성분과 내적」, 『고등학교 기하와 벡터』, 지학사, 2018, 81-96쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

주어진 조건들을 적절히 활용하여 필요한 결과를 도출하는 과정을 수학적으로 입증할 수 있는 능력은 이공계 대학 교육을 받는 학생에게 필수적인 요소이다. 이 문제를 풀기 위한 수학적 개념은 평균값 정리, 정적분의 계산, 삼각함수의 성질, 치환적분법, 부분적분법 등 고등학생이 알아야 할 기본적인 내용이면서 이공계 대학생이 갖춰야 할 기초 지식이기도 하다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 정적분을 다른 형태로 표현할 수 있는지 평가한다. 제시문을 적절히 활용할 수 있어야 한다.

[3.2] 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분을 두 개의 정적분으로 나누고 적절히 치환하여 원하는 형태로 변형할 수 있는지 평가한다.

[3.3] 평균값 정리와 제시문 (가)를 활용하여 직접 계산할 수 없는 정적분 값의 범위를 구할 수 있는지 평가하는 문제이다. 또한 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있어야 한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 제시문 (나)의 (4)에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(\sin x - \cos x)\,dx$$

이다. 그런데 $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)dx$$

이고, 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

이다.

[3.2] 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$$

이다. 우변의 첫 번째 정적분에서는 $\frac{\pi}{4} - x = y$로 치환하고, 두 번째 정적분에서는 $x - \frac{\pi}{4} = y$로 치환하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\sin(-y)\,(-dy) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\sin y\,dy$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\sin y\,dy + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\sin y\,dy$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\sin x\,dx$$

이다. 따라서

$$\boxed{\text{A}} = \frac{\pi}{4} + x, \qquad \boxed{\text{B}} = \frac{\pi}{4} - x$$

이다.

[3.3] 문항 [3.1]과 [3.2]의 결과에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}\sin x\,dx$$

이다. 평균값 정리에 의하여

$$f\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - f\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2xf'(c)$$

를 만족하는 c가 구간 $\left(\frac{\pi}{4}-x, \frac{\pi}{4}+x\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에 적어도 하나 존재하고, 제시문 (나)의 (3)에 의하여 $m \le f'(c) \le M$이다. 따라서 제시문 (가)에 의하여

$$\sqrt{2}\,m\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx \;\le\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx \;\le\; \sqrt{2}\,M\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx$$

이다. 부분적분하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

이므로

$$\left(1-\frac{\pi}{4}\right)m \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx \le \left(1-\frac{\pi}{4}\right)M$$

이 성립한다.

3. 출제근거

「평균값 정리」, 『고등학교 미적분Ⅰ』, 미래엔, 2019, 112-116쪽.
「정적분의 계산」, 『고등학교 미적분Ⅰ』, 미래엔, 2019, 169-172쪽.
「삼각함수의 성질」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 좋은책 신사고, 2017, 63-66쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 좋은책 신사고, 2017, 75-78쪽.
「치환적분법」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 좋은책 신사고, 2017, 141-144쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 좋은책 신사고, 2017, 145-146쪽.
「치환적분법을 이용한 정적분」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 좋은책 신사고, 2017, 150-151쪽.
「부분적분법을 이용한 정적분」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 좋은책 신사고, 2017, 152쪽.
「정적분과 부등식」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 교학사, 2018, 175쪽.
「정적분과 부등식」, 『고등학교 미적분Ⅱ』, 금성출판사, 2018, 185쪽.