<자연계열-오후>

2020학년도 수시모집
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

고등학교 과정 수학에서 다루는 기본적인 내용에 대한 이해도를 전반적으로 평가하고자 하였다. 이를 위하여 고등학교 수학에서 배우는 공간도형, 벡터, 조건부확률, 적분 등 다양한 개념을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 정팔면체의 두 면이 이루는 각을 계산할 수 있어야 한다. 따라서 좌표공간에서 평면의 방정식을 이해하고 두 평면이 이루는 각을 알아낼 수 있는지 평가한다.
[1.2] 확률을 이용하여 주어진 상황을 수학적으로 이해하고 해결할 수 있는지 평가하는 문항이다. 이 문항에서는 조건부확률 및 확률의 성질을 이용하여 문제에서 요구하는 확률을 계산할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 정적분의 성질을 이용하여 하나의 정적분을 두 개의 정적분으로 나누고 적절히 치환할 수 있어야 한다. 또한 유도한 적분공식을 이용하여 지수함수와 삼각함수로 표현된 함수의 정적분 값을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 점 $\mathrm{A}(0,0,1)$, $\mathrm{B}(1,0,0)$, $\mathrm{C}(0,-1,0)$, $\mathrm{D}(0,1,0)$ 그리고 M을 A와 B의 중점이라 할 때, 정팔면체에서 이웃하는 두 면이 이루는 각은 선분 AB와 수직인 두 선분 MC와 MD가 이루는 각이다. $\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\left(-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$ 이므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MC}}||\overrightarrow{\mathrm{MD}}|}=-\frac{1}{3}$$

[1.2] A역에 내릴 사건을 A, B역에 내릴 사건을 B, 버스를 탈 사건을 Bus, 택시를 탈 사건을 $Taxi$라 하면,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{5},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(Taxi|A)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(Bus|A)=\frac{7}{10},\ \mathrm{P}(A|Bus)=\frac{9}{10}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Bus)&=\mathrm{P}(A\cap Bus)+\mathrm{P}(B\cap Bus)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(Bus|A)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(Bus|B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{5}\mathrm{P}(Bus|B)\end{aligned}$$

이고,

$$\mathrm{P}(A|Bus)=\frac{\mathrm{P}(A\cap Bus)}{\mathrm{P}(Bus)}=\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{5}\mathrm{P}(Bus|B)}=\frac{9}{10}$$

이다. 따라서 $\mathrm{P}(Bus|B)=\frac{14}{45}$ 이다.

[1.3] 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

이고, 우변의 두 번째 정적분에서 $x-a=y$로 치환하면 $\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(y+a)\,dy$이므로

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a \{f(x)+f(x+a)\}\,dx$$

이다. 따라서

$$\boxed{\text{A}} = f(x+a)$$

이다($\boxed{\text{A}} = f(2a-x)$도 가능). 위의 등식에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}}\,dx &= \int_0^{\pi}\left\{\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2(x+\pi)}{1+2020^{\sin(x+\pi)}}\right\}dx \\ &= \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}} + \frac{\cos^2 x}{1+2020^{-\sin x}}\right)dx\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\frac{1}{1+2020^{\sin x}} + \frac{1}{1+2020^{-\sin x}} = 1$$

이므로

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+2020^{\sin x}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

이다.

3. 출제근거

「미적분의 기본정리」,『고등학교 미적분 I』, 미래엔, 2019, 167-168쪽.
「정적분의 성질」,『고등학교 미적분 I』, 미래엔, 2019, 171쪽.
「삼각함수의 성질」,『고등학교 미적분 II』, 좋은책 신사고, 2017, 63-66쪽.
「삼각함수의 부정적분」,『고등학교 미적분 II』, 미래엔, 2019, 139-140쪽.
「이면각」,『고등학교 기하와 벡터』, 좋은책 신사고, 2019, 115-116쪽.
「정다면체의 이면각의 크기」,『고등학교 기하와 벡터』, 미래엔, 2019, 143쪽.
「두 공간벡터가 이루는 각의 크기」,『고등학교 기하와 벡터』, 좋은책 신사고, 2019, 154쪽.
「평면과 구의 방정식」,『고등학교 기하와 벡터』, 미래엔, 2019, 199-208쪽.
「확률의 성질」,『고등학교 확률과 통계』, 비상교육, 2019, 63-70쪽.
「확률의 기본성질」,『고등학교 확률과 통계』, 금성출판사, 2019, 83-91쪽.
「조건부확률」,『고등학교 확률과 통계』, 비상교육, 2019, 73-82쪽.
「조건부확률」,『고등학교 확률과 통계』, 금성출판사, 2019, 94-115쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

함수의 미분을 통해 주어진 자료를 설명하는 함수에 대한 여러 정보를 알아낼 수 있다. 원하는 정보를 얻기 위해 함수의 도함수, 이계도함수, 롤의 정리, 곱의 미분, 지수함수의 미분을 이용하는 능력을 평가하고자 한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 롤의 정리를 이용하여 이계도함수로 주어지는 방정식의 근의 개수를 알 수 있는지 평가한다.

[2.2] 주어진 방정식의 근들이 서로 다르기 위한 필요조건을 찾을 수 있는지 평가한다.

[2.3] 함수와 도함수, 이계도함수의 합으로 표현된 방정식의 근의 개수를 곱의 미분과 지수함수의 미분법을 이용하여 알 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 m개의 실근을 $s_1,\cdots,s_m$ $(s_1<\cdots<s_m)$이라 하자. 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f(s_1)=f(s_2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 s_1과 s_2 사이에 $f'(t_1)=0$인 실수 t_1이 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $j=2,\cdots,m-1$에 대하여 $f'(t_j)=0$인 t_j가 s_j와 s_{j+1} 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f'(x)=0$의 근 $t_1,\cdots,t_{m-1}$이

$$s_1<t_1<s_2<\cdots<t_{m-1}<s_m$$

을 만족하므로 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 $m-1$개이다.

위와 같은 과정을 반복하면, 함수 $f'(x)$가 미분가능하고 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 적어도 $m-1$개이므로 방정식 $f''(x)=0$의 서로 다른 실근은 적어도 $m-2$개이다.

[2.2] 0은 $f(x)=0$의 근이 될 수 없다. 그 이유는 다음과 같다. 함수 $g(x)$를 두 번 미분하면

$$g''(x)=e^x\{f(x)+2f'(x)+f''(x)\}$$

인데, $g''(0)=0$이고 $f''(0)=0$이므로 $0=f(0)+2f'(0)$이다. 만약 $f(0)=0$이면, $f'(0)=0$이다. 그러면 $x=0$은 방정식 $f(x)=0$의 중근이 되는데, 이는 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 세 개라는 조건에 모순이 된다.

[2.3] 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근이 세 개이므로 $g(x)=e^{\frac{x}{3}}f(x)=0$의 서로 다른 실근도 세 개이고 따라서 문항 [2.1]에 의하여 $g''(x)=0$의 실근은 적어도 한 개이다. 그런데 함수 $g(x)$를 두 번 미분하면

$$g''(x)=\frac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}\{f(x)+6f'(x)+9f''(x)\}$$

이므로 제시문 (나)에 의해 방정식 $f(x)+6f'(x)+9f''(x)=0$은 실근을 갖는다.

3. 출제근거

「롤의 정리」, 『고등학교 미적분 I』, 미래엔, 2019, 112쪽.

「함수의 곱의 미분법」, 『고등학교 미적분 I』, 미래엔, 2019, 103쪽.

「미분가능」, 『고등학교 미적분 I』, 천재교육, 2019, 118쪽.

「방정식의 실근의 개수는 어떻게 구할까?」, 『고등학교 미적분 I』, 미래엔, 2019, 129쪽.

「함수의 곱의 미분법」, 『고등학교 미적분 I』, 천재교육, 2019, 141-144쪽.
「도함수를 이용하여 방정식과 부등식 문제를 해결」, 『고등학교 미적분 I』, 천재교육, 2019, 148-148쪽.
「이계도함수」, 『고등학교 미적분 II』, 천재교육, 2019, 118쪽.
「지수함수 $y=e^x$의 도함수」, 『고등학교 미적분 II』, 미래엔, 2019, 35쪽.
「지수함수의 미분법」, 『고등학교 미적분 II』, 천재교육, 2019, 37-38쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

물체가 어떤 상황에서 운동하고 있을 때 그 물리적 상황을 수학적으로 이해하고 분석함으로써 수학 및 물리에 대한 개념을 좀 더 명확하게 세울 수 있다. 곡선도로와 직선도로가 연결되어 있을 때 곡선도로를 달리는 자동차는 그 곡선의 접선 방향으로 나아가려는 성질이 있기 때문에 연결된 직선도로는 곡선도로의 접선이 되어야 하며, 이는 접선의 방정식을 이해하는 데 도움이 된다. 이 문제에서는 직선 및 곡선의 어떤 함수의 형태로 설계된 도로 위를 움직이는 자동차의 운동을 물리적 용어를 사용하지 않고 수학적 개념을 사용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 평가한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 주어진 값을 이용하여 직선도로에서의 물체의 운동을 이해할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 물체의 운동 상황에서 이동거리를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 공식과 등차수열의 합을 이용하여 올바른 답을 찾을 수 있는지 평가한다.
[3.4] 곡선의 길이를 구하는 공식과 수열의 합을 이용하여 올바른 답을 찾을 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $t=24$일 때 운동 방향이 바뀌므로 10분부터 30분까지 자동차 A가 이동한 거리는 다음과 같다.

$$|f(24)-f(10)|+|f(30)-f(24)|=|16-2|+|-2-16|=32$$

점 (m,n)은 곡선 위에 있으므로 $m=\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}+16>10$이다. 따라서 n은 10이하의 자연수이고 $(m,n)=(34,9)$이다.

[3.2] 자동차 B의 이동거리는 곡선도로의 길이와 같으므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_0^9 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\int_0^9 \sqrt{1+y}\,dy=\frac{2}{3}(10\sqrt{10}-1)$$

[3.3] 역함수 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{y}}$이므로 점 P의 y좌표는 4이다. 따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{64}{3},4\right)$이고 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x-\frac{20}{3}$이다. k구역의 넓이는

$$\int_{k-1}^{k}\left(2y+\frac{40}{3}\right)dy = 2k+12+\frac{1}{3}$$

이므로 k구역에 놓을 수 있는 보도블록의 개수는 $2k+12$개이다. 따라서 모든 구역에 놓을 수 있는 보도블록의 개수는 $\sum_{k=1}^{9}(2k+12)=198$개이다.

[3.4] 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{40}{3},0\right)$이므로 선분 PQ의 길이는 $4\sqrt{5}$이다. 트럭 C의 이동거리는

$$\int_{4}^{9}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy+4\sqrt{5} = \int_{4}^{9}\sqrt{1+y}\,dy+4\sqrt{5} = \frac{20}{3}\sqrt{10}+\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

이다. 모든 구역에 보도블록을 다 놓을 때까지 걸린 시간은

$$\sum_{k=1}^{9}(2k+12)(0.1k)=111$$

이므로 트럭 C가 이동하는데 걸린 시간도 111분이다.

3. 출제근거

「등차수열」,『고등학교 수학 II』, 지학사, 2017, 126-132쪽.
「여러 가지 수열의 합」,『고등학교 수학 II』, 지학사, 2017, 146-150쪽.
「접선의 방정식」,『고등학교 미적분 I』, 미래엔, 2019, 109-111쪽.
「도형의 넓이」,『고등학교 미적분 II』, 교학사, 2018, 184-187쪽.
「평면곡선의 접선」,『고등학교 기하와 벡터』, 좋은책 신사고, 2018, 31-37쪽.
「평면곡선의 접선」,『고등학교 기하와 벡터』, 비상교육, 2019, 37-43쪽.
「속도와 거리」,『고등학교 기하와 벡터』, 비상교육, 2019, 98-102쪽.
「속도와 거리」,『고등학교 기하와 벡터』, 좋은책 신사고, 2018, 95-101쪽.
「속도와 가속도」,『고등학교 기하와 벡터』, 천재교육, 2019, 120-130쪽.