

제 3 교 시

2020학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역

가형

성명		수험번호								
----	--	------	--	--	--	--	--	--	--	--

- 먼저 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 기입하십시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확하게 표기하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
- 주관식 답의 숫자는 자리에 맞추어 표기하며, '0'이 포함된 경우에는 '0'을 OMR 답안지에 반드시 표기하십시오.

※ 시험 시작 전까지 표지를 넘기지 마시오.

관
망

1. 제 3 사분면의 각 θ 에 대하여 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 일 때, $\tan \theta$ 의 값은? [2점]

- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

2. 좌표평면 위의 네 점 $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C(4, 0)$ 에 대하여 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$ 의 값은? [2점]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

4. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(A^C \cup B) = \frac{2}{3}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? (단, A^C 은 A 의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

5. 같은 종류의 흰 바둑돌 5개와 같은 종류의 검은 바둑돌 4개가 있다. 이 9개의 바둑돌을 일렬로 나열할 때, 검은 바둑돌 4개 중 2개는 서로 이웃하고, 나머지 2개는 어느 검은 바둑돌과도 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 60

② 72

③ 84

④ 96

⑤ 108

6. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $P(a, 6)$ 에 대하여 $\overline{PF} = k$ 이다. $a+k$ 의 값은? [3점]

① 16

② 17

③ 18

④ 19

⑤ 20

7. 이산확률변수 X 가 가지는 값이 0, 2, 4, 6 이고 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x)=\begin{cases} a & (x=0) \\ \frac{1}{x} & (x=2, 4, 6) \end{cases}$$

일 때, $E(aX)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 1

⑤ 2

8. 주머니 A에는 1부터 5까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 한 장의 카드를 꺼낸다. 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수일 확률은? [3점]

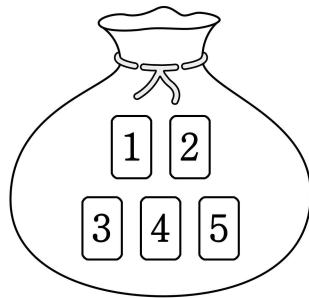
① $\frac{1}{4}$

② $\frac{3}{8}$

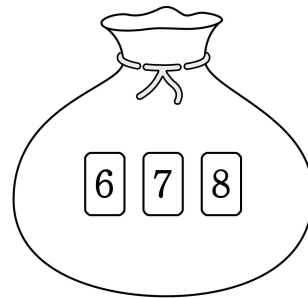
③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$

⑤ $\frac{3}{4}$



주머니 A



주머니 B

9. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B와 평면 α 위에 있지 않은 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이다. 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{PH}=4$ 일 때, 삼각형 HAB의 넓이는? [3점]

- ① $3\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{7}$ ④ 9 ⑤ $3\sqrt{11}$

10. 함수 $f(x) = \frac{6x^3}{x^2+1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(3)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{5}{6}$

11. 좌표공간의 두 점 $A(2, 2, 1)$, $B(a, b, c)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점이 y 축 위에 있다. 직선 AB 와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다. 양수 b 의 값은?
- [3점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

12. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\tan 2x \sin 2x = \frac{3}{2}$ 의 모든 해의 합은? [3점]

① 2π

② $\frac{5}{2}\pi$

③ 3π

④ $\frac{7}{2}\pi$

⑤ 4π

13. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 의 꼭짓점 중 x 좌표가 음수인 점을 중심으로 하는 원 C 가 있다.

점 $(3, 0)$ 을 지나고 원 C 에 접하는 두 직선이 각각 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 과 한 점에서만 만날 때,
원 C 의 반지름의 길이는? [3점]

① 2

② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

14. 어느 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리는 평균이 m km, 표준편차가 σ km인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 직장인들 중에서 36명을 임의추출하여 조사한 결과 36명이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 총합은 216km이었다. 이 결과를 이용하여, 이 도시의 직장인들이 하루 동안 도보로 이동한 거리의 평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \leq m \leq a+0.98$ 이다. $a+\sigma$ 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 6.96 ② 7.01 ③ 7.06 ④ 7.11 ⑤ 7.16

15. 두 상수 a, b ($b < 0 < a$)에 대하여 직선 $\frac{x-a}{a} = 3-y = \frac{z}{b}$ 위의 임의의 점과 평면 $2x-2y+z=0$ 사이의 거리가 4로 일정할 때, $a-b$ 의 값은? [4점]

① 25

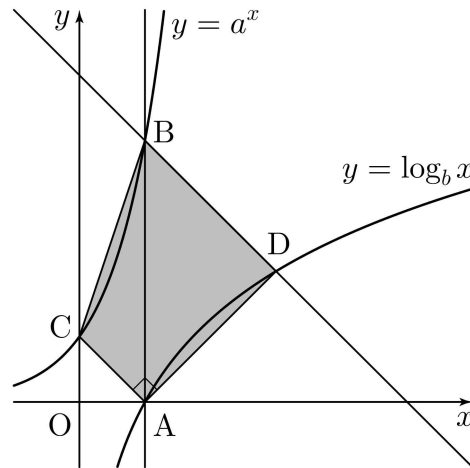
② 27

③ 29

④ 31

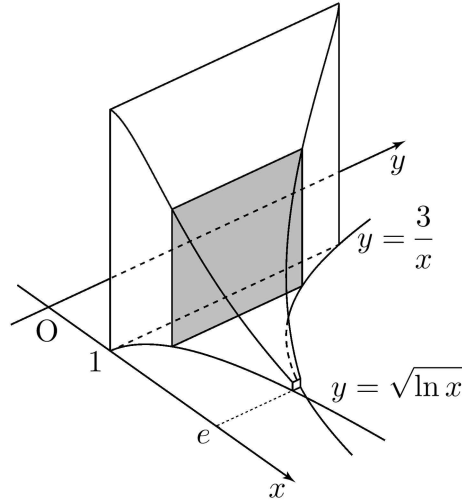
⑤ 33

16. 그림과 같이 1보다 큰 두 상수 a, b 에 대하여 점 $A(1, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = a^x$ 과 만나는 점을 B 라 하고, 점 $C(0, 1)$ 에 대하여 점 B 를 지나고 직선 AC 와 평행한 직선이 곡선 $y = \log_b x$ 와 만나는 점을 D 라 하자. $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ 이고, 사각형 $ADBC$ 의 넓이가 6일 때, $a \times b$ 의 값은? [4점]



- ① $4\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ 8 ④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

17. 그림과 같이 두 곡선 $y = \frac{3}{x}$, $y = \sqrt{\ln x}$ 와 두 직선 $x=1$, $x=e$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



- ① $5 - \frac{9}{e}$ ② $5 - \frac{8}{e}$ ③ $5 - \frac{7}{e}$ ④ $6 - \frac{9}{e}$ ⑤ $6 - \frac{8}{e}$

18. 다음은 자연수 n 에 대하여 방정식 $a+b+c=3n$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c) 가

$$a > b \text{ 또는 } a > c$$

를 만족시킬 확률을 구하는 과정이다.

방정식

$$a+b+c=3n \dots\dots (*)$$

을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

방정식 $(*)$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 가 $a > b$ 또는 $a > c$ 를 만족시키는 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^C 은 방정식 $(*)$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 가 $a \leq b$ 와 $a \leq c$ 를 만족시키는 사건이다.

이제 $n(A^C)$ 의 값을 구하자.

자연수 $k(1 \leq k \leq n)$ 에 대하여 $a=k$ 인 경우,

$b \geq k, c \geq k$ 이고 방정식 $(*)$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$\boxed{\text{(나)}}$ 이므로

$$n(A^C) = \sum_{k=1}^n \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식에 $n=2$ 를 대입한 값을 p , (나)에 알맞은 식에 $n=7, k=2$ 를 대입한 값을 q , (다)에 알맞은 식에 $n=4$ 를 대입한 값을 r 라 할 때, $p \times q \times r$ 의 값은? [4점]

- ① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

19. 함수 $f(x) = xe^{2x} - (4x + a)e^x$ 이 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 가질 때, $f(x)$ 의 극솟값은?

(단, a 는 상수이다.) [4점]

① $1 - \ln 2$

② $2 - 2\ln 2$

③ $3 - 3\ln 2$

④ $4 - 4\ln 2$

⑤ $5 - 5\ln 2$

20. 두 상수 a, b 와 함수 $f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ f(b-x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\int_a^{a-b} g(x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2} \ln 5$

② $\ln 5$

③ $\frac{3}{2} \ln 5$

④ $2 \ln 5$

⑤ $\frac{5}{2} \ln 5$

21. 두 함수

$$f(x) = 4\sin \frac{\pi}{6}x,$$

$$g(x) = |2\cos kx + 1|$$

이 있다. $0 < x < 2\pi$ 에서 정의된 함수

$$h(x) = (f \circ g)(x)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k 는 자연수이다.) [4점]

————— <보 기> —————

ㄱ. $k=1$ 일 때, 함수 $h(x)$ 는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k=2$ 일 때, 방정식 $h(x)=2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

ㄷ. 함수 $|h(x)-k|$ 가 $x=\alpha$ ($0 < \alpha < 2\pi$)에서 미분가능하지 않은 실수 α 의 개수를 a_k 라 할 때,

$$\sum_{k=1}^4 a_k = 34 \text{ 이다.}$$

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 함수 $f(x) = (3x + e^x)^3$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = 2\sqrt{2} \sin t + \sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t + 2\sqrt{2} \cos t$$

가 있다. 이 곡선 위의 $t = \frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 y 절편을 구하시오. [3점]

24. 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르고, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $P(X \geq 128) = P(X \leq 140)$
 (나) $P(m \leq X \leq m+10) = P(-1 \leq Z \leq 0)$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$P(X \geq k) = 0.0668$ 을 만족시키는 상수 k 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, Z 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.) [3점]

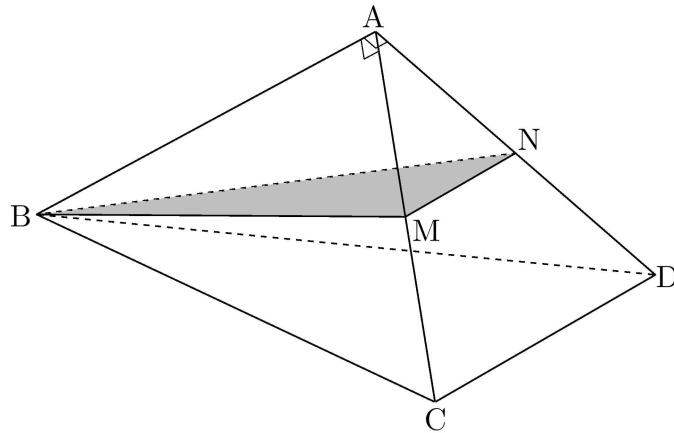
25. 1부터 9까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 9개의 공을 같은 종류의 세 상자에 3개씩 나누어 넣으려고 한다. 세 상자 중 어떤 한 상자에 들어 있는 3개의 공에 적힌 수의 합이 나머지 두 상자에 들어 있는 6개의 공에 적힌 수의 합보다 크도록 9개의 공을 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 공을 넣는 순서는 고려하지 않는다.) [3점]

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ACD 를 한 면으로 하는 사면체 $ABCD$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{BC} = 3\sqrt{10}$

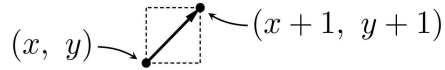
(나) $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

두 모서리 AC , AD 의 중점을 각각 M , N 이라 할 때, 삼각형 BMN 의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이를 S 라 하자. $40 \times S$ 의 값을 구하시오. [4점]

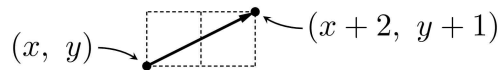


27. 한 번 누를 때마다 좌표평면 위의 점 P 를 다음과 같이 이동시키는 두 버튼 ㉠, ㉡이 있다.

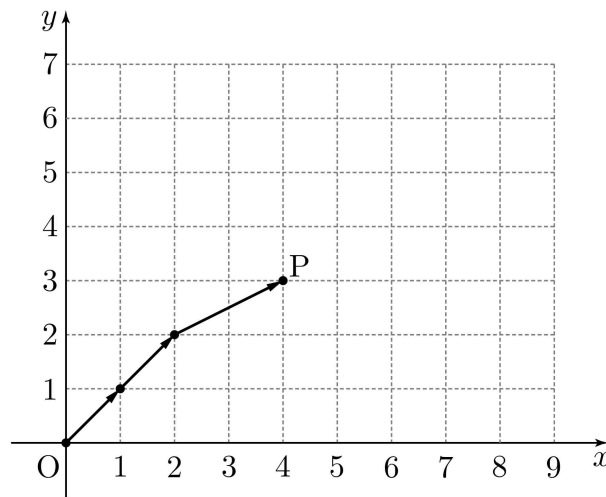
[버튼 ㉠] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분을 따라 점 (x, y) 에 있는 점 P 를 점 $(x+1, y+1)$ 로 이동시킨다.



[버튼 ㉡] 그림과 같이 길이가 $\sqrt{5}$ 인 선분을 따라 점 (x, y) 에 있는 점 P 를 점 $(x+2, y+1)$ 로 이동시킨다.

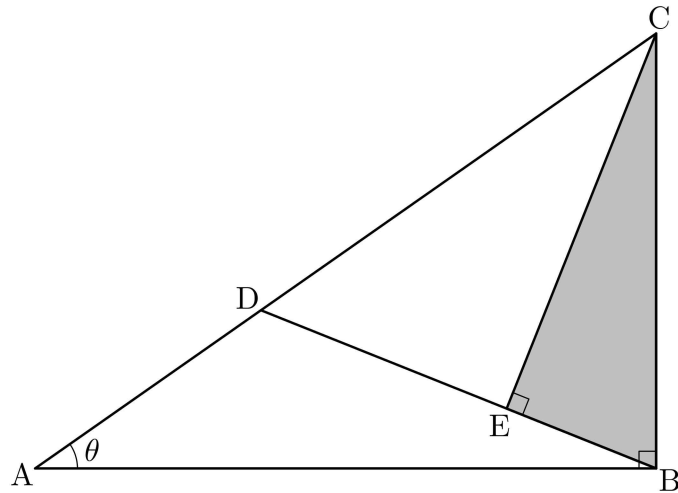


예를 들어, 버튼을 ㉠, ㉠, ㉡ 순으로 누르면 원점 $(0, 0)$ 에 있는 점 P 는 아래 그림과 같이 세 선분을 따라 점 $(4, 3)$ 으로 이동한다. 또한 원점 $(0, 0)$ 에 있는 점 P 를 점 $(4, 3)$ 으로 이동시키도록 버튼을 누르는 경우는 ㉠㉠㉡, ㉠㉡㉠, ㉡㉠㉠으로 3가지이다.



원점 $(0, 0)$ 에 있는 점 P 를 두 점 $A(5, 5)$, $B(6, 4)$ 중 어느 점도 지나지 않고 점 $C(9, 7)$ 로 이동시키도록 두 버튼 ㉠, ㉡을 누르는 경우의 수를 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$ 이고 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle CAB = \theta$ 라 하자. 선분 AC 를 4:7로 내분하는 점을 D 라 하고 점 C 에서 선분 BD 에 내린 수선의 발을 E 라 할 때, 삼각형 CEB 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



29. 좌표공간에 구 $C: x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$ 와 점 $A(0, 3, 3)$ 이 있다. 구 C 위의 점 P 와 $|\overrightarrow{AQ}|=2$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{QA}=3\sqrt{6}$ 을 만족시키는 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 의 최댓값은 $p\sqrt{2}+q\sqrt{6}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p, q 는 유리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2) = 0$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이다.

$g'(-1)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1) = \frac{n}{m-3\ln 3}$ 일 때, $|m \times n|$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이고, $\ln 3$ 은 $1 < \ln 3 < 1.1$ 인 무리수이다.) [4점]

관
망