[한국과학기술원(KAIST) 문항 정보 1]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사	
전형명	일반전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	삼각방정식, 삼각함수, 삼각함수의 그래프, 치환적분법
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

자연수 n에 대해 두 함수 $f(x)=\sin^3(nx)$와 $g(x)=\cos^3(nx)$를 생각하자. (총 5점)

(1) 구간 $[0, 2\pi]$에서 두 평면 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 교점의 x좌표의 최솟값 a와 최댓값 b를 구하시오. (1점)

(2) 구간 $[a, b]$에서 두 평면 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때 극한값 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구하시오. (4점)

3. 출제 의도

- 삼각함수로 주어진 평면 곡선의 그래프를 이해하고 미분, 적분을 활용해 넓이를 구할 수 있는지 확인, 또한 수열의 극한에 대한 기본 개념을 알고 있는가를 평가

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
(1)	교육과정	[미적분Ⅱ]-(2)삼각함수-(가) 삼각함수의 뜻과 그래프
	성취기준·성취수준	미적2213. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다. 미적2212-2. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
(2)	교육과정	[미적분Ⅰ]-(1) 수열의 극한 [미적분Ⅱ]-(4)적분법-(가) 여러 가지 적분법
	성취기준·성취수준	미적1112. 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2413-2. 삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	김원경 외	비상교육	2014.3.1	15-18
	미적분II	김원경 외	비상교육	2014.3.1	57-70
	미적분II	김원경 외	비상교육	2014.3.1	137-138
	미적분II	김원경 외	비상교육	2014.3.1	144-145
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 임을 이용하여 간단한 삼각방정식을 해결하는 문항이다. (2)번은 삼각함수 그래프의 주기성과 대칭성을 이용하여 그래프의 개형을 그리고, 도형의 넓이 S_n 찾아내고, 치환적분법을 이용하여 S_n 의 값을 구하고, 구한 값의 극한값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

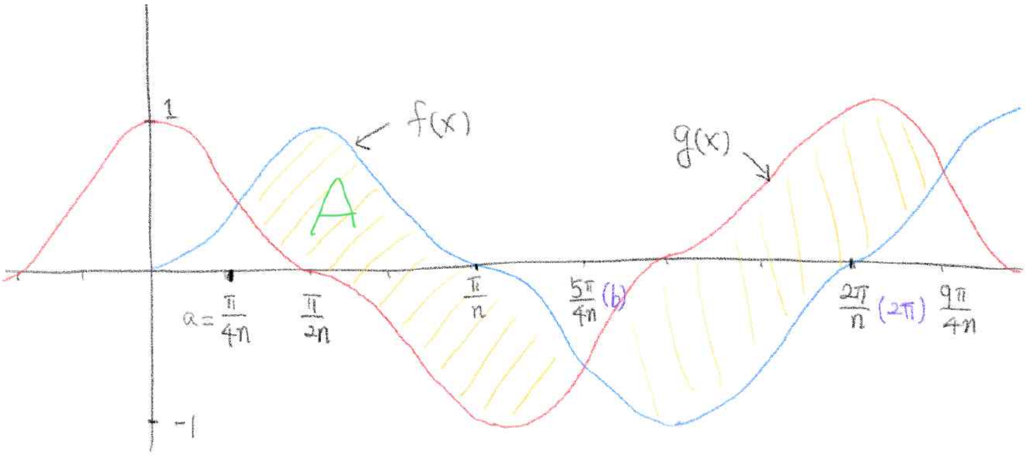
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 1점: 정확한 답과 근거 제시 - 교점의 일반항을 구한 경우 또는 최솟값과 최댓값 중 하나만 맞춘 경우 0.5점	1점
(2)	- 4점: 정확한 답과 근거 제시 - 부분 점수 요소 ① $A = \dfrac{5\sqrt{2}}{3n}$ (혹은 $nA = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$)를 위한 계산식을 세우고 맞으면 2.5 점 - 적분식(integrand) 및 양 끝 구간: 1점 - (치환을 이용하여) 부정적분을 구하는 것: 1점 - 답을 정확하게 구하는 것: 0.5점 ② $S_n = (2n-1)A$를 구하는 부분: 1점 ③ S_n의 극한값을 구하는 부분: 0.5점	4점

7. 예시 답안

(1) 두 곡선이 만나는 교점은 등식 $f(x) = g(x)$에서 알 수 있다. 즉, 등식 $\tan^3(nx) = 1$로부터, $\tan(nx) = 1$ 을 얻게 되고 따라서, 교점은 $nx = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (k는 정수)를 만족한다. 그러므로, 주어진 구간 $[0, 2\pi]$에서 두 평면 곡선이 만나는 교점의 x좌표는 $\dfrac{\pi}{4n}, \dfrac{5\pi}{4n} \left(= \dfrac{\pi}{4n} + \dfrac{\pi}{n}\right), \ldots, \dfrac{(8n-3)\pi}{4n} \left(= \dfrac{\pi}{4n} + \dfrac{(2n-1)\pi}{n}\right)$ 이다 (총 $2n$개).

답: $a = \dfrac{\pi}{4n},\ b = \dfrac{(8n-3)\pi}{4n} = 2\pi - \dfrac{3\pi}{4n}$

(2) 삼각함수의 기본 성질(주기성 혹은 대칭성)을 고려해 다음과 같이 평면에 두 곡선을 나타낼 수 있다.



구간 $[\frac{\pi}{4n}, \frac{5\pi}{4n}]$에서 $f(x)$와 $g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A라고 하자. 적분을 이용해 $A=\int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{5\pi}{4n}} f(x)-g(x)\,dx$임을 알 수 있다. 주어진 구간내의 교점의 개수가 $2n$개이므로 삼각함수의 주기성에 의해 $S_n=(2n-1)A$가 된다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분은 치환 $y=\cos(nx), z=\sin(nx)$ 및 등식 $\sin^2(nx)+\cos^2(nx)=1$을 통해 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\int f(x)dx=\int [1-cos^2(nx)]sin(nx)dx=\frac{1}{n}\int (y^2-1)\,dy=\frac{1}{n}[\frac{cos^3(nx)}{3}-cos(nx)]+c$$

$$\int g(x)dx=\int [1-sin^2(nx)]cos(nx)dx=\frac{1}{n}\int (1-z^2)\,dz=\frac{1}{n}[sin(nx)-\frac{sin^3(nx)}{3}]+c$$

(c는 상수).

(위의 부정적분은 $sin(3x)=3sin(x)-4sin^3(x)$, $cos(3x)=4cos^3(x)-3cos(x)$를 이용해 계산할 수도 있다)

이를 이용하면

$nA=\frac{[cos^3(nx)+sin^3(nx)]}{3}-cos(nx)-sin(nx)\,|_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{5\pi}{4n}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$ 임을 알 수 있다.

따라서 $S_n=(2n-1)A=(2-\frac{1}{n})\frac{5\sqrt{2}}{3}=\frac{10\sqrt{2}n-5\sqrt{2}}{3n}$ 를 얻게 되고 극한값

$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{10\sqrt{2}}{3}$ 을 구하게 된다.

답: $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

학생들이 많이 접해 본 삼각함수, 적분에 관련된 문제이다. (1)번은 간단한 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각방정식을 해결할 수 있는가를 평가하는 문항이다. (2)번은 삼각함수의 주기성과 대칭성을 정확히 이해하여 그래프의 개형을 그려내는 부분이 중요하게 작용한 문항이다. (2)번 문항에서 학생들이 삼각함수의 그래프를 이해하고 분석하는 능력을 평가하기에 좋은 문항이다. 그래프의 개형을 이해하여 주어진 영역의 넓이를 수식으로 찾고, 찾은 수식을 삼각함수의 적분과 치환적분을 이용하여 그 값을 계산하는 부분에서 학생들의 적분에 대한 기본적인 개념을 평가할 수 있는 좋은 문항이다. [미적분Ⅰ], [미적분Ⅱ]의 교과서를 충실히 공부한 학생들은 그리 어렵지 않게 해결할 수 있었으리라 사려된다.

[고등학교 수학교사 B]

주어진 상황을 삼각함수와 적분을 활용하여 해결하는 문제이다. 본 문제는 도구로서의 수학을 경험할 수 있는 좋은 문항이다. 특히 수학적 도구에 대한 깊이 있는 이해가 중요하다는 것을 학생들이 느낄 수 있었으리라 생각된다. (1)번은 간단한 삼각방정식을 풀어내는 문항으로 학생들의 기초・기본학습을 평가하는 문항이다. (2)번은 삼각함수의 그래프의 깊이 있는 이해를 평가하고, 이해한 사실을 논리적으로 표현하고, 적분이라는 수학적 도구를 사용하여 구하고자 하는 것을 해결해내는 능력을 평가하기에 적절한 문항이다. [미적분Ⅰ], [미적분Ⅱ]의 교육과정을 충실히 깊이 있게 이해한 학생들은 쉽게 해결해 냈으리라 생각된다.

[한국과학기술원(KAIST) 문항 정보 2]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사	
전형명	일반전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	기하와 벡터 / 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 원의 방정식, 벡터의 내적, 조건부 확률
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

3차원 공간상에 원점 $O(0,0,0)$가 중심이고 반지름이 R인 구 S와, 두 점 $P(1,0,-1)$, $Q(0,1,1)$를 지나는 직선 l을 생각하자. 구 S의 반지름 R을 구간 $0 \le R \le 1$ 에서 균일하게 분포되어 있는 확률변수로 생각하자. (즉, R의 확률 밀도함수는 0과 1 사이에서 1로 주어진다.) (총 5점)

(1) 직선 l을 포함하고 구 S에 접하는 평면이 2개 존재할 확률을 구하시오. (2점)

(2) 직선 l을 포함하고 구 S에 접하는 두 접평면에서의 접점을 각각 A와 B라고 하자. 이렇게 2개의 접평면이 존재할 때, $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 내적이 0보다 클 확률을 구하시오. (3점)

3. 출제 의도

- 2차식의 풀이 방법 이해, 공간 지각능력과 수식으로의 표현 능력, 기하학적인 의미 분석능력 및 확률론과의 융합적 사고능력 평가

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
(1)	교육과정	[확률과 통계]-(2) 확률 - (나) 조건부 확률 [기하와 벡터]-(3) 공간도형과 공간벡터-(다) 공간벡터
	성취기준·성취수준	확통1221. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1334. 좌표공간에서 벡터를 이용하여 평면의 방정식과 구의 방정식을 구할 수 있다. 기벡1332. 두 공간벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
(2)	교육과정	[확률과 통계]-(2) 확률 - (나) 조건부 확률 [기하와 벡터]-(2) 평면벡터-(나) 평면벡터의 성분과 내적
	성취기준·성취수준	확통1221. 조건부확률의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014.3.1	152-155
	기하와 벡터	김원경 외	비상교육	2014.3.1	79-84
	확률과통계	김원경 외	비상교육	2014.3.1	73-74
기타					

5. 문항 해설

본 문항은 기하와 벡터에서 배운 직선, 구에 대한 개념과 확률의 정의를 융합한 문항이다. 특히 주어진 조건하에서 확률의 개념(조건부확률)을 이해할 수 있는지를 평가하기에 좋은 문항이다. (1)번 문항은 상황을 기하적으로 이해하고, 이해를 바탕으로 벡터를 활용하여 수식으로 표현하여 확률을 계산할 수 있는가를 평가하는 문항이다. (2)번 문항은 주어진 공간도형 상황을 평면도형으로 이해하고, 벡터의 내적을 활용하여 수식을 세운 후 확률값을 계산하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 0.5점: 직선 l의 매개변수 표현을 정확히 구한 경우 - 1점: 직선 l의 방정식을 구의 방정식에 대입하여 얻은 R의 이차방정식에 판별식을 적용하여 R의 범위를 정확히 도출한 경우 - 0.5점: 위의 계산에서 직선 l과 구 S가 만나지 않을 확률을 정확히 도출한 경우 (다른 풀이 채점기준) - 0.5점: 직선 l의 매개변수 표현을 정확히 구한 경우 - 1점: 원점에서 l과의 최단거리를 정확히 구하여 R의 범위를 정확한 도출한 경우 - 0.5점: 위의 계산에서 직선 l과 구 S가 만나지 않을 확률을 정확히 도출한 경우	2점
(2)	- 1점: 기하학적인 관계를 이해하며 $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}R$를 유도함. - 1점: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2\cos\theta > 0$에서 $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 4R^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow R > \frac{1}{2}$를 유도함. - 0.5점: 사건을 적절하게 정의하고, 조건부 확률로 인식함. - 0.5점: 정확한 확률값을 계산함. (다른 풀이 채점기준) - 1점: 접점 A와 B의 좌표를 정확히 구한 경우 - 1점: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$를 정확히 구한 경우 - 0.5점: 사건을 적절하게 정의하여 조건부 확률로 인식함. - 0.5점: 정확한 확률값을 계산함.	3점

7. 예시 답안

(1) 2개의 접평면이 존재하는 것은 직선이 구와 만나지 않는 것이다.

직선 l을 매개변수로 다음과 같이 표현하자.

$$l = \{(1,0,-1) + t(-1,1,2) : t\text{는 실수}\} = \{(1-t, t, -1+2t) : t\text{는 실수}\}.$$

직선 l과 구 S가 만나는 점을 구하기 위해, 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=R^2$에 직선 위의 점 $(1-t, t, -1+2t)$를 대입해서 정리하면

$$(1-t)^2 + t^2 + (-1+2t)^2 = R^2,\ \text{즉}\ 6t^2 - 6t + 2 - R^2 = 0.$$

실근을 가지지 않을 양의 실수 R의 범위는 판별식 $D = 9 - 6(2-R^2) < 0$ 으로부터

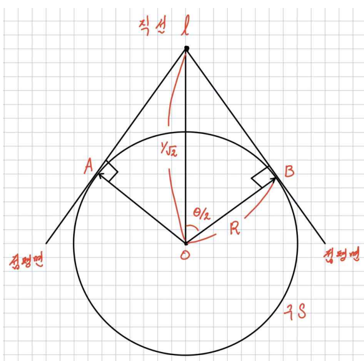
$0 < R < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$를 얻게 된다. R이 구간 $0 \le R \le 1$ 에서 균일하게 분포되어 있는 확률변수이므로, 직선 l과 구 S가 만나지 않을 확률은 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$가 된다.

답: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(다른 풀이)
원점에서 직선 l에 내리는 수선의 발을 다음과 같이 구하자. 먼저 l의 방정식은 $(1,0,-1)+t\vec{v}$, $\vec{v}=(-1,1,2)$ 이다. 벡터 $\vec{v}$와 수직이면서 원점을 지나는 평면 P를 생각하자. P의 방정식은 $-x+y+2z=0$이다. l과 P의 교점이, 원점에서 l에 내리는 수선의 발이다. 교점의 좌표는 $-(1-t)+t+2(-1+2t)=0$, 즉, $t=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0)$이므로, 원점에서 l과의 거리는 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$임을 얻게 된다. 따라서 구 S가 직선 l과 만나지 않을 확률은, 구의 반지름 R이 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$보다 작을 확률이며, R은 구간 $0 \le R \le 1$ 에서 균일하게 분포되어 있는 확률변수기에, 원하는 확률은 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$임을 얻게 된다.

답: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) 먼저 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각을 θ라고 하자. 접점 A와 B가 모두 구 S 위에 있기 때문에 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 길이가 모두 R이므로, $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = R^2\cos\theta$ 이다. $\cos\theta$를 구하기 위해 직선 l의 방향에서 투영하여 보면 옆과 같은 그림을 얻는다. 이 그림에서,



$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2}R,\ \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 4R^2 - 1$$

이다. 따라서 내적 $> 0 \Leftrightarrow \cos\theta > 0 \Leftrightarrow$
$4R^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow R > 1/2$가 된다.

사건 E : 각도가 90°보다 작은 사건 $E = \{R > 1/2\}$

사건 F : 2개의 접평면이 존재하는 사건 $F = \{0 < R < 1/\sqrt{2}\}$
따라서 구하는 조건부 확률은

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(1/2 < R < 1/\sqrt{2})}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1 - 1/\sqrt{2}$$ 이다.

답: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ **또는** $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

(다른 풀이)

먼저 접점 A와 B의 좌표를 다음과 같이 구하자. 접평면과 구 S가 만나는 점을 (x_0, y_0, z_0)라 하자. 구의 중심이 원점이기 때문에 접평면의 법선 방향이 (x_0, y_0, z_0)가 되어 접평면의 방정식은

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

이 된다. 점 (x_0, y_0, z_0)가 구 S상에 있고 주어진 두 점 $P(1,0,-1)$과 $Q(0,1,1)$이 접평면 $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$상에 있으므로 대입하면 $x_0 - z_0 = R^2, y_0 + z_0 = R^2$를 만족한다.

$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$과 연립하면

$$x_0 = R^2 \pm R\sqrt{\frac{1-2R^2}{3}}, y_0 = R^2 \mp R\sqrt{\frac{1-2R^2}{3}}, z_0 = \pm R\sqrt{\frac{1-2R^2}{3}}$$

을 얻게 된다. 두 (x_0, y_0, z_0) 값이 주는 벡터가 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$ 이므로, 내적을 계산하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(R^4 - \frac{R^2 - 2R^4}{3}\right) + \left(R^4 - \frac{R^2 - 2R^4}{3}\right) - \frac{R^2 - 2R^4}{3} = 4R^4 - R^2$$

임을 얻는다. 따라서 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2(4R^2 - 1)$ 임을 얻는다. θ가 예각이면 내적이 양수이므로 $4R^2 - 1 > 0$가 된다.

따라서 각도가 90°보다 작은 사건 $E = \{R > 1/2\}$이고 앞 질문에서 구한 2개의 접평면이 존재하는(즉, 구와 직선이 만나지 않는) 사건 $F = \{0 < \mathrm{R} < 1/\sqrt{2}\}$이다.
따라서 구하는 조건부 확률은

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(1/2 < R < 1/\sqrt{2})}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1 - 1/\sqrt{2}$$

이다.

답: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ **또는** $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

벡터를 활용한 직선과 구의 방정식을 활용하여 주어진 상황을 수학적 수식으로 표현할 수 있는지, 조건부 확률에 대한 개념을 정확히 이해하고 있는지, 벡터의 내적 개념을 적절히 활용할 수 있는지 등을 평가하는 융합적 사고능력을 평가하기에 좋은 문항이라 사려된다. 특히 확률값을 구하는 데, 기하와 벡터교과에서 학습한 내용과 융합된다는 사실을 경험하기에 매우 좋은 문항이다. (1)번 문항은 직선과 구의 방정식을 벡터를 활용하여 표현하고, 조건부확률 개념의 기초적인 이해를 바탕으로 확률값을 구하는 문항이고, (2)번 문항은 공간도형 상황을 평면도형 상황으로 이해하고, 이를 벡터의 내적을 이용하여 수식으로 표현하고, 확률의 정의를 이용하여 확률을 구하는 좋은 문항이라 사려된다. 기하와 벡터에서 학습한 벡터를 활용한 직선과 구의 방정식, 조건부확률, 벡터의 내적등에 대한 깊이 있는 이해가 된 학생들은 쉽게 해결할 수 있었으리라 사려된다.

[고등학교 수학교사 B]

주어진 상황을 기하와 벡터에서 배운 직선과 구의 방정식, 벡터의 내적 개념과 확률과 통계에서 배운 확률의 정의, 조건부 확률에 대한 개념을 활용한 융합적인 좋은 문항이다. (1)번은 기하와 벡터에서 학습한 직선과 구의 방정식을 활용하여 수식을 세운 후, 조건부 확률의 정의를 적용하는 문항이고, (2)번은 기하와 벡터에서 학습한 벡터의 내적을 활용하여 수식을 세운 후, 확률의 정의를 적용하는 문항이다. [기하와 벡터]에서 직선과 구의 방정식, 벡터의 내적, [확률과 통계]에서 확률의 뜻과 조건부 확률의 교육과정을 잘 이해한 학생들은 쉽게 해결해 냈으리라 생각된다.

[한국과학기술원(KAIST) 문항 정보 3]

1. 일반정보

<table>
<tr><td>유형</td><td colspan="2">□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사</td></tr>
<tr><td>전형명</td><td colspan="2">학교장추천전형, 고른기회전형</td></tr>
<tr><td>해당 대학의 계열(과목) / 문항번호</td><td colspan="2">수학 / 문제1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">출제 범위</td><td>수학과 교육과정 과목명</td><td>미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 확률과 통계</td></tr>
<tr><td>핵심개념 및 용어</td><td>정적분과 부정적분의 관계, 부분적분법, 확률밀도함수</td></tr>
<tr><td>예상 소요 시간</td><td colspan="2">10분</td></tr>
</table>

2. 문항 및 제시문

자연수 n에 대해 0보다 크거나 같은 값을 갖는 확률변수 X_n의 확률밀도함수가

$$f_n(x) = c_n x^n e^{-x},\ x \geq 0$$

으로 주어졌다. (e는 자연로그의 밑, c_n은 n에 따라 달라지는 양의 상수이다.)

단, 모든 n에 대해서 $\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$ 임이 알려져 있다. (총 5점)

(1) $n=2$인 경우인 $f_2(x)$가 확률밀도함수가 되는 상수 c_2의 값을 구하시오. (2점)

(2) 자연수 n과 고정된 양의 상수 $r>0$에 대해서 확률 $P(a \leq X_n \leq a+r)$가 최대가 되는 양수 a를 r과 n을 사용하여 표현하고 최대인 근거를 설명하시오. (3점)

3. 출제 의도

- 부분적분법을 이해하는지 확인하고, 적분과 미분의 관계를 통해 적분식의 미분을 구하고 최댓값을 구하는 과정을 통하여 미분과 최댓값의 관계를 이해하는지 평가.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
(1)	교육과정	[미적분Ⅱ]-(4) 적분법-(가) 여러 가지 적분법 [확률과 통계]-(3) 통계-(가) 확률분포
	성취기준·성취수준	미적2412. 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.
(2)	교육과정	[미적분Ⅰ]-(4) 다항함수의 적분법-(나) 정적분 [미적분Ⅱ]-(4) 적분법-(나) 정적분의 활용 [확률과 통계]-(3) 통계-(가) 확률분포
	성취기준·성취수준	미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. 미적2421. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. 확통1311-2. 연속확률변수와 확률밀도함수의 뜻을 안다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	미적분Ⅰ	황선욱 외	좋은책 신사고	2014.3.1.	159-160
	미적분Ⅱ	우정호 외	두산동아(주)	2014.3.1.	190-191
	확률과통계	황선욱 외	좋은책 신사고	2014.3.1.	113-114
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 $f_2(x)$가 확률밀도함수가 되기 위해서 $x \geq 0$에서 함수 $f_2(x)=c_2x^2e^{-x}$의 그래프와 x축으로 둘러쌓인 부분의 면적이 1이 되어야 함을 이용하여 c_2의 값을 구하는 문제로 주어진 조건과 부분적분법을 이용하여 정적분을 계산하는 문항이다.

(2)번은 확률 $P(a \leq X_n \leq a+r)$은 a부터 $a+r$ 까지의 x축과 $f_n(x)$의 그래프 사이의 면적이고 $f_n(x)$의 그래프는 $x=n$에서 최댓값을 갖고 증가에서 감소하는 형태임으로 $f_n(a)=f_n(a+r)$인 a가 유일하게 존재하며, 이 때 a의 값을 구하고 면적이 최대가 되는 이유를 논리적으로 설명하는 것을 요구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	부분점수 구성 요소 (2점 만점 중) 1점: 부분적분 과정을 적절하게 설명. 1점: c_2값을 정확하게 계산.	2점
(2)	부분점수 구성 요소 (3점 만점 중) 0.5점: 확률 $P(a \le X_n \le a+r)$은 a부터 $a+r$ 까지의 x축과 $f_n(x)$의 그래프 사이의 면적임을 설명. 1점: 적절한 논리로 $f_n(a)=f_n(a+r)$를 만족할 때 a부터 $a+r$ 까지의 면적이 a근방의 면적들 중 최대임을 증명/설명함. 1점: $f_n(a)=f_n(a+r)$ 이 되는 $a^* = \dfrac{r}{e^{r/n}-1}$를 정확하게 계산함. 0.5점: $a=a^*$에서 최대가 되는 이유를 설명하기 위해 $f_n{}'(x)=nc_n x^{n-1}e^{-x}-c_n x^n e^{-x}=c_n x^{n-1}e^{-x}(n-x)$ 을 유도하여 $x=n$ 앞뒤의 부호가 +에서 -로 바뀌어서 $f_n(x)$의 개형이 0에서부터 증가하여 최댓값을 갖고 0으로 감소하는 형태임을 알아낸다. 따라서 $f_n(a)=f_n(a+r)$를 만족하는 a가 유일하게 존재함을 설명.	3점

7. 예시 답안

(1) 부분적분을 이용하면 $\int_0^\infty xe^{-x}dx = -xe^{-x}|_0^\infty + \int_0^\infty xe^{-x}dx = 0+(-e^{-x})|_0^\infty = 1$

이고, 이 결과와 부분적분을 이용하면

$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x}|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}dx = 0+2\times 1 = 2$ 를 얻는다.

따라서 $1=\int_0^\infty f_2(x)dx = c_2\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = c_2\times 2$ 이므로 $c_2 = 1/2 = 0.5$이다.

<u>답: $c_2 = 1/2$</u>

(2)

<u>방법 1</u>: $P(a \le X_n \le a+r) = \int_a^{a+r} f_n(x)dx = \int_0^{a+r} f_n(x)dx - \int_0^a f_n(x)dx$ 이므로 편의상 이 값을 $g(a) = \int_0^{a+r} f_n(x)dx - \int_0^a f_n(x)dx$ 로 놓는다. 물론 $g(a)$ 대신에 다른 어떤 이름을 붙여도 상관없다. 최대로 만들고 싶은 $g(a)$를 a에 대해서 미분하면 적분과 미분의 관계에 의해

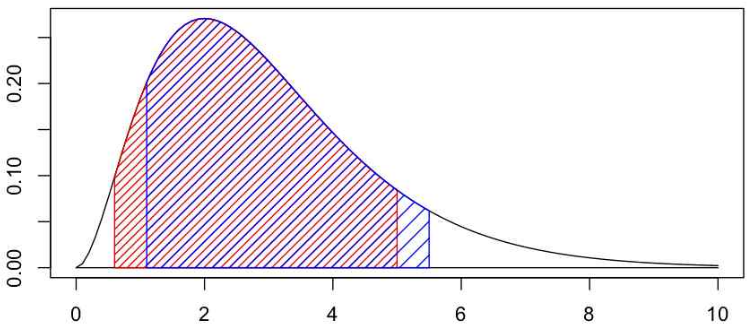
$$
\begin{aligned}
g'(a) &= f_n(a+r) - f_n(a) = c_n(a+r)^n e^{-(a+r)} - c_n a^n e^{-a} \\
&= c_n a^n e^{-(a+r)}\left(\left(\frac{a+r}{a}\right)^n - e^r\right) = c_n a^n e^{-(a+r)}\left(\left(1+\frac{r}{a}\right)^n - e^r\right)
\end{aligned}
$$

이다. 우선, $g'(a) = 0$ 을 찾는다. $g'(0) = c_n r^n e^{-r} > 0$ 이므로 $a > 0$인 경우만을 고려하였다. $\left(1+\frac{r}{a}\right)^n - e^r = 0$을 풀면 $a^* = \frac{r}{e^{r/n}-1}$일 때 $g'(a^*) = 0$임을 알 수 있다. 이 값에서 최대가 되는 것을 확인하기 위해서는 여러 방법이 있을 수 있지만 표준적인 방법은 a^* 전후에서 $g'(a)$의 부호를 보는 것이다. 식에서 확인할 수 있듯이 $g'(a)$는 a^*보다 작은 a에 대해 양수이고 a^*보다 큰 a에 대해 음수이므로 $g(a)$는 증가하다가 $a = a^*$일 때 확률이 최대가 되고 a가 더 커지면 $g(a)$는 감소하게 된다.

<u>방법 2</u>: 해당 확률은 a부터 $a+r$ 까지의 x축과 $f_n(x)$의 그래프 사이의 면적이다. 따라서 이 면적을 최대로 하는 a값에 대하여 $f_n(a)$와 $f_n(a+r)$의 값이 다르다면 값이 작은 f_n값 쪽의 x축 구간을 조금 절약하여 큰 f_n값 쪽 x구간에 더하면 (함수 f_n이 연속이므로) 면적이 늘어나게 된다. 따라서 면적이 최대라는 가정에 모순이므로 a와 $a+r$에서 f_n의 두 값은 같아야 한다. 따라서, $f_n(a) = f_n(a+r)$을 풀면 방법 1에서와 같은 절차로 $a^* = \frac{r}{e^{r/n}-1}$를 얻는다. 특히

$$
f_n'(x) = n c_n x^{n-1} e^{-x} - c_n x^n e^{-x} = c_n x^{n-1} e^{-x}(n-x)
$$

이므로 $f_n(x)$의 값은 0부터 n까지 증가하여 $x = n$에서 최댓값을 취한 뒤 계속 감소하고 $f_n(0) = 0$, $f_n(\infty) = 0$이다. 따라서 같은 f_n값을 갖는 두 값 a와 $a+r$을 찾는 것이 가능하다.



8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

고등학교 [확률과 통계] 교과서에서는 연속확률변수에서 확률을 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 정의한다. 따라서 확률밀도함수의 그래프가 곡선으로 주어지면 정적분을 이용하여 확률을 구해야 하며, 구간의 폭이 상수로 주어진 구간에서 확률이 최대가 되는 순간을 알아보기 위해서는 미분을 이용해야 하므로 적분과 미분 사이의 관계를 알아야 한다. [미적분Ⅰ], [미적분Ⅱ], [확률과 통계] 등의 교과서에 제시된 개념을 이해하고 미분, 적분, 통계 등 고등학교 수학에서 배우는 개념들을 융합할 수 있는지를 평가하기에 매우 적합한 문항이다.

[고등학교 수학교사 B]

확률과 통계에서 배운 연속확률변수의 확률밀도함수와 확률의 정의, 정적분을 활용한 도형의 넓이 구하기, 부분적분법, 적분과 미분 사이의 관계, 미분을 이용한 최댓값 구하기 등의 개념을 알고 문제 상황에 적용할 수 있는지를 묻는 융합적 사고력을 평가하는 문항이다. (1)번은 부분적분법에서 많은 교과서에 수록되어 있는 함수 xe^x과 매우 유사하므로 학생들이 쉽게 해결할 수 있을 것으로 생각되며, (2)번은 최댓값을 구하기 위해서 미분을 이용해 그래프 개형을 파악하는 문제가 교과서에 다수 수록되어 있기에 적분과 미분 사이의 관계를 이해하고 있는 학생은 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

[한국과학기술원(KAIST) 문항 정보 4]

1. 일반정보

유형	□ 논술고사 ■ 면접 및 구술고사	
전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	수학 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅰ
	핵심개념 및 용어	이차함수의 최솟값, 미분불가능한 함수의 최솟값
예상 소요 시간	10분	

2. 문항 및 제시문

n개의 실수 $x_1, x_2, \dots, x_n$이 주어졌다. (총 4점)

(1) n개의 양의 실수 $w_1, \dots, w_n$에 대해서 $\sum_{i=1}^{n} w_i \times (x_i - a)^2$이 최소가 되는 상수 a의 값을 구하시오 (2점).

(2) $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n$라 할 때, $\sum_{i=1}^{n} |x_i - b|$가 최소가 되는 상수 b의 값을 정하시오 (2점).

3. 출제 의도

- 이차함수의 최솟값, 미분불가능한 함수의 최솟값, 함수의 합에 대해 이해하는지 평가.

4. 문항 및 제시문의 출제 근거

가) 교육과정 및 관련 성취기준

문항 및 제시문		관련 성취기준
(1)	교육과정	[미적분Ⅰ]-(3) 다항함수의 미분법-(다) 도함수의 활용
	성취기준·성취수준	미적1334. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
(2)	교육과정	[수학Ⅰ]-(2) 방정식과 부등식-(라) 여러 가지 부등식 [미적분Ⅰ]-(3) 다항함수의 미분법-(가) 미분계수
	성취기준·성취수준	수학1241. 부등식의 성질을 이해하고, 절댓값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다. 미적1313. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	황선욱 외	좋은책 신사고	2014.3.1.	95-96
	미적분Ⅰ	김원경 외	비상교육	2014.3.1.	87
	미적분Ⅰ	황선욱 외	좋은책 신사고	2014.3.1.	124-126
기타					

5. 문항 해설

(1)번은 미분을 이용하여 합으로 표현된 이차함수가 최소가 되게하는 a의 값을 구하는 문항이다.

(2)번은 미분이 불가능한 함수의 최솟값에 관한 문항으로 각각의 구간으로 나누어 절댓값을 푼 후 그래프의 개형을 그려 최소가 되게하는 b의 값을 구하는 문항이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	부분점수 구성 요소 (총2점 만점 중) 1점: a를 구하는 과정을 미분이나 이차식의 완전제곱 등으로 설명. 1점: 이를 이용하여 a를 구하는 식을 정확히 제시.	2점
(2)	부분점수 구성 요소 (총 2점 만점 중), 1점: $x_k \le b$인 경우와 $b < x_{k+1}$인 경우를 분리해서 구간 $x_k \le b \le x_{k+1}$에서의 함수의 기울기 $2k-n$를 정확하게 계산; 0.5점: 기울기가 0인 구간이나 점 주변 영역에서 기울기가 음수에서 양수로 바뀌는 지점에서 최소가 됨을 설명. 0.5점: n이 짝수와 홀수인 경우 각각에 대해 답을 정확하게 답함. <다른 풀이> 부분점수 구성 요소 (총2점 만점 중), 1점: $x_k \le b$인 경우와 $b < x_{k+1}$인 경우를 분리해서 구간 $x_k \le b \le x_{k+1}$에서의 함수의 기울기 $2k-n$를 정확하게 계산; 0.5점: 기울기가 0인 구간이나 점 주변 영역에서 기울기가 음수에서 양수로 바뀌는 지점에서 최소가 됨을 설명. 0.5점: n이 짝수와 홀수인 경우 각각에 대해 답을 정확하게 답함.	2점

7. 예시 답안

(1) $f(a)=\sum_{i=1}^{n} w_i \times (x_i-a)^2$는 a에 대하여 이차항의 계수가 양수 $\sum_{i=1}^{n} w_i$인 이차식이므로 미분이 0이 되도록 a를 정하면 된다.

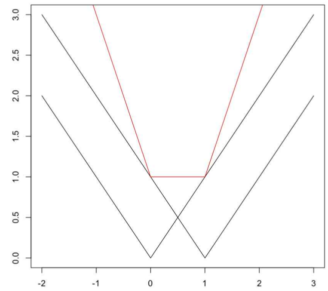
즉, $f'(a)=-2\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i-a)=-2\sum_{i=1}^{n} w_i x_i+2a\sum_{i=1}^{n} w_i=0$을 풀면 $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$를 얻는다.

이때 $f''(a)=2\sum_{i=1}^{n} w_i>0$ 이므로, 최솟값임을 알수 있다.

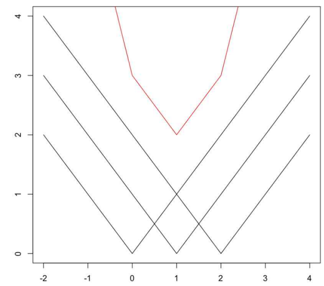
또는 $f(a)=a^2\sum_{i=1}^{n} w_i-2a\sum_{i=1}^{n} w_i x_i+\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2$이 a에 대한 이차식이므로 완전제곱 형태로 변환하여 최솟값을 구해도 된다.

답: $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j}$ (단, $x_1, x_2, \ldots, x_n$들의 가중평균이라고 답해도 됨. 가중치: $w_1, \ldots, w_n$)

(2) 우선 제일 간단한 경우로 $n=2$ (짝수)이고 $x_1=0,\ x_2=1$, 즉 $|b|+|1-b|$을 생각해보면, $(0,0)$, $(1,0)$을 지나는 2개의 절댓값 함수들의 합으로 0보다 작은 영역에서는 -2의 기울기로 감소하다가 0과 1사이에서는 상수값을 갖고 1보다 큰 영역에서는 2의 기울기로 증가하는 연속함수이다. 따라서 함수값을 최소로 하는 b값은 0과 1 사이의 모든 값이다.



간단하지만 다른 형태인 $n=3$ (홀수)이고 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$, 즉 $|b|+|1-b|+|2-b|$을 생각해보면, $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$을 지나는 절댓값 함수들의 합으로 0보다 작은 영역에서는 -3의 기울기로 감소하다가 0과 1사이에서는 -1의 기울기를 갖고 1과 2사이에서는 1의 기울기, 그리고 2보다 큰 영역에서는 3의 기울기로 증가하는 연속함수이다. 따라서 함숫값을 최소로 하는 b값은 1이 유일하다.



일반적인 경우에는 $x_k \le b \le x_{k+1}$이라면,

$$x_1 - b \le \cdots \le x_{k-1} - b \le x_k - b \le 0 \le x_{k+1} - b \le \cdots \le x_n - b$$

이므로
$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i - b| \\ &= (b - x_1) + \cdots + (b - x_{k-1}) + (b - x_k) + (x_{k+1} - b) + \cdots + (x_n - b) \\ &= (k - (n-k))b - \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \\ &= (2k - n)b + \text{constant} \end{aligned}$$

인 연속함수로

<u>x_k와 x_{k+1} 사이에서 $2k-n$의 기울기</u>

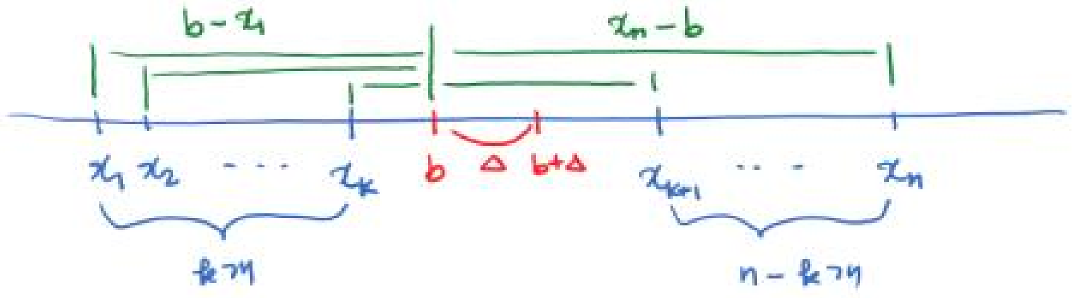
를 갖는다. 이때,

- $n=2m$ 으로 짝수라면 $k=m=n/2$일 때, 즉 b가 x_m와 x_{m+1} 사이일 때는 기울기가 0이 되어 <u>**구하는 b는 x_m와 x_{m+1} 사이의 모든 값**</u>이다. 참고로, x_{m-1}와 x_m 사이에서는 -2의 기울기를, x_{m+1}와 x_{m+2} 사이에서는 2의 기울기를 갖는다.
- $n=2m+1$로 홀수라면 $k=m=(n-1)/2$으로 b가 x_m와 x_{m+1} 사이일 때 -1의 기울기를, $k=m=(n+1)/2$으로 b가 x_{m+1}와 x_{m+2} 사이일 때는 1의 기울기를 갖게 되어 <u>$b=x_{m+1}$**에서 유일한 최솟값**</u>을 갖는다.

이 값은 통계학에서 중앙값(median)으로 불린다.

<다른 풀이>

$x_k \le b \le x_{k+1}$라 하자. 적당한 크기의 양수 Δ에 대해서 대소 관계들을 다음과 같이 그릴 수 있다.



b가 $b+\Delta$로 변화할 때, $f(b+\Delta)$의 증감을 살펴보면

$$f(b) = \sum_{i=1}^{k}(b - x_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - b)$$

$$f(b+\Delta) = \sum_{i=1}^{k}(b+\Delta - x_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - b - \Delta) = f(b) + k\Delta - (n-k)\Delta = f(b) + (2k-n)\Delta$$

즉, $b \to b+\Delta$로 변할 때, $(2k-n)\Delta$ 만큼 증감한다. (b보다 작은 k개에 대하여 $k\Delta$ 만큼 증가하고, b보다 큰 $(n-k)$개에 대하여 $(n-k)\Delta$만큼 감소한다.) 따라서,

- $k < n-k$이면 ($2k-n<0$이면), 양의 Δ에 대하여 $f(b+\Delta)$가 감소하고,
- $k > n-k$이면 ($2k-n>0$이면), 음의 Δ에 대하여 $f(b+\Delta)$가 감소한다.

즉, b의 좌우에 있는 x_i의 개수가 다른 경우($k \ne n-k$), 적절한 b의 증감이 $f(b)$를 감소시킬 수 있으므로 $k=n-k$인 중앙값에서 함수값이 최소가 된다.

최종적으로, n이 짝수인지 홀수인지에 따라서 두 경우로 나누어 생각하면 이전 방법으로 구한 답을 얻는다.

8. 총 평

[고등학교 수학교사 A]

이차함수와 절댓값을 포함한 미분 불가능한 함수의 최솟값을 구하는 과정에 대한 문항으로 고등학교 교과서에 미분을 이용한 다항함수의 최대·최소, 구간을 나누어 절댓값을 푸는 문제가 많이 수록되어 있으므로 유한개의 함수의 합으로 표현된 함수의 미분을 이해하고, 절댓값을 포함한 함수에서 구간을 나누어 절댓값을 풀어 그래프를 그린 후 규칙성을 찾아 문제를 해결하면 되기 때문에 고등학교 교육과정을 충실히 이행한 학생은 쉽게 해결할 수 있는 문항이라 사려된다.

[고등학교 수학교사 B]

함수의 그래프 개형을 그려 최소가 되는 지점을 찾는 문항이다. (1)번은 이차함수의 합으로 표현된 함수로 [수학Ⅱ]의 수열 단원에서 규칙성을 찾아 합의 기호를 이용하여 나타내는 문제를 많이 다루고 있으며, [미적분Ⅰ] 미분을 이용하여 이차함수의 최솟값을 구하는 문제가 많이 제시되어 있기 때문에 고등학교 교육과정에 충실하고 학생들이 쉽게 해결할 수 있는 문항이라고 생각한다. (2)번은 [수학Ⅰ]의 여러 가지 부등식 단원에서 절댓값 기호가 있는 부등식을 풀 때 구간을 나누어 절댓값을 푸는 과정이 있고, [미적분Ⅰ]에서 미분 불가능한 함수의 그래프를 그리는 내용이 교과서에 수록되어 있기 때문에 학생들이 어렵지 않게 문제를 해결할 수 있을 것으로 생각된다.